

Испитивање функција

припремио Владимир Балтић

Испитивање функција је централни и свакако најбитнији део сваког курса математике. Он даје математичку основу за скицирање графика на основу математичке формуле одређених појава које се јављају у економији, природним наукама, техници, физици...

Ми ћемо испитивање функција разложити на осам делова:

1. Област дефинисаности функције (или домен функције)
2. Нуле, знак функције и пресек са y -осом
3. Парност и периодичност функције
4. Граничне вредности функције на крајевима домена
5. Асимптоте функције
6. Први извод, монотоност и локални екстремуми функције
7. Други извод, конвексност и превојне тачке функције
8. Цртање графика функције.

Сада ћемо се детаљније осврнути на сваки од ових делова.

1. Област дефинисаности функције (или домен функције). Најчешће ће функција f коју испитујемо бити састављена (прецизније математички би се рекло да је композиција) од више елементарних функција, тј. могли бисмо функцију f да представимо као $f = g(h(x))$. Углавном ће функција f бити дефинисана за исте вредности x као и h , сем неколико изузетака:

1° $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ је дефинисан када су дефинисане и $g(x)$ и $h(x)$ и кад је $h(x) \neq 0$;

2° $f(x) = \log_a g(x)$ је дефинисан када је дефинисана и $g(x)$ и када је $g(x) > 0$;

3° $f(x) = \sqrt{g(x)}$ је дефинисан када је дефинисана и $g(x)$ и када је $g(x) \geq 0$

(исто важи и за било који "паран" корен: $\sqrt[n]{}$, $\sqrt[n]{}$, ..., док су непарни, попут $\sqrt[n]{g(x)}$, деф. кад је $g(x)$ деф.);

4° $f(x) = \operatorname{tg} g(x)$ је дефинисан када је дефинисана и $g(x)$ и када је $g(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$);

5° $f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$ је дефинисан када је дефинисана и $g(x)$ и када је $g(x) \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

6° $f(x) = \arcsin g(x)$ је дефинисан када је дефинисана и $g(x)$ и када је $-1 \leq g(x) \leq 1$;

7° $f(x) = \arccos g(x)$ је дефинисан када је дефинисана и $g(x)$ и када је $-1 \leq g(x) \leq 1$.

Други део, у коме се тражи решавање неједначина или различитости, се поклапа са следећим:

2. Нуле и знак функције. Пресек са y -осом представља тачка $Y(0, f(0))$.

На нулама и знаку се нећемо претерано задржавати јер се на неки начин подразумева средњошколско знање решавања квадратних, логоритамских, експоненцијалних, тригонометријских једначина и неједначина, као и неједначина везаних за рационалне функције (видети Обнављање средњошколске математике).

3. Парност и периодичност функције. За функцију $f(x)$ кажемо да је парна ако је $f(-x) = f(x)$ за свако x из домена D (одређеног под 1). $f(x)$ је непарна ако је $f(-x) = -f(x)$ за свако x из домена D .

Ако је функција парна или непарна потребно је то показати, а ако није ни парна ни непарна онда је довољно наћи неку вредност $x = a \in D$ за коју је $f(-a) \neq f(a)$ и $f(-a) \neq -f(a)$.

Ако функција нема симетричан домен у односу на $x = 0$ онда одмах можемо рећи да није ни парна ни непарна (исто важи и ако нуле и знак функције нису симетрични у односу на $x = 0$).

За функцију $f(x)$ кажемо да је периодична ако постоји број T такав да је $f(x) = f(x + T)$ за свако за свако x из домена D . Најмањи такав број T означаваћемо са ω и он се назива период функције f . Такође ако је функција периодична потребно је то показати, а ако није то се може закључити на основу делова испитивања функција (домена, нула и знака, граничних вредности) ако ту добијене вредности нису периодичне.

4. Граничне вредности функције на крајевима домена. Ако се домен D може представити као унија интервала облика (a, b) потребно је за сваки од тих интервала одредити следеће две граничне вредности: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ и

$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. Ако је нека од вредности a и b бесконачна, потребно је одредити одговарајући бесконачни лимес, нпр. ако је $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ одређујемо $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Ако имамо интервал облика $(a, b]$ потребно је одредити $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ и вредност $f(b)$ (обратите пажњу - за $x = b$ функција је дефинисана и ту израчунавамо вредност функције, а не тражимо лимес!) и слично за $[a, b)$.

Некад је потребно користити и Лопиталово правило (може се применити само на лимесе облика $\frac{0}{0}$ или облика $\frac{\infty}{\infty}$): $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{h'(x)}$. Кад имамо да је $g \cdot h$ облика $0 \cdot \infty$ то сводимо на $\frac{g}{\frac{1}{h}} = \frac{g}{h^{-1}} \rightarrow \frac{0}{0}$ или $\frac{h}{\frac{1}{g}} = \frac{h}{g^{-1}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$. Један од ова два свођења води ка решењу, док други даје још сложенији лимес!

5. Асимптоте функције. Постоје три врсте асимптота: вертикалне, хоризонталне и косе (мада су хоризонталне у ствари специјални случај косих).

Вертикалне асимптоте се јављају кад имамо прекид у домену: права $x = a$ је вертикална асимптота ако a не припада домену, а бар један од лимеса $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ постоји и бесконачан је ($+\infty$ или $-\infty$).

Ако је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, где је b неки коначан број, тада је права $y = b$ лева хоризонтална асимптота. Ако је

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, где је b неки коначан број, тада је права $y = b$ десна хоризонтална асимптота. Ако је $y = b$ и лева и десна хоризонтална асимптота, онда кажемо да је то обострана хоризонтална асимптота.

Уколико је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ бесконачан, тада тражимо леву косу асимптоту. Лева коса асимптота постоји ако постоје

следећа два лимеса: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ – ако је k коначан и $k \neq 0$, онда тражимо $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - k \cdot x$ (где је k

првоодређени лимес) и уколико је n коначан тада имамо да је лева коса асимптота права $y = kx + n$.

Аналогно тражимо десну косу асимптоту: ако је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ бесконачан та асимптота постоји ако постоје и

коначни су (и још $k \neq 0$) лимеси $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - k \cdot x$ и тада је десна коса асимптота $y = kx + n$.

Ако се лева и десна асимптота поклапају (тј. то је иста права) кажемо да имамо обострану косу асимптоту.

6. Први извод, монотоност и локални екстремуми функције. Према правилима диференцирања се одреди први извод $f'(x)$ функције $f(x)$. Даља анализа се своди на одређивање нула и знака првог извода: када је $f'(x) = 0$ имамо кандидата за екстремум (максимум или минимум). На сваком од интервала на коме је $f'(x) > 0$ за свако x имамо да је функција растућа и то ћемо означаавати стрелицом \nearrow , а на сваком од интервала на коме је $f'(x) < 0$ за свако x имамо да је функција опадајућа, тј. \searrow . Сад се враћамо на питање одређивања екстремума: кандидат $x = a$ је локални максимум ако је до a функција f растућа, а након a опадајућа, $\nearrow a \searrow$ (да је максимум могли смо добити и испитивањем знака другог извода – ако је $f''(a) > 0$), а кандидат $x = a$ је локални минимум ако је до a функција f опадајућа, а након a растућа, $\searrow a \nearrow$ ($f''(a) < 0$). Ако смо добили да је нека тачка екстрем ту треба израчунати вредност функције, $f(a)$, и тачку $M(a, f(a))$ означавамо на графику. Остала два случаја ($\searrow a \searrow$ и $\nearrow a \nearrow$) нису екстремуми.

Веома често се заборавља да се испита начин како (тј. под којим углом) функција ”улази” у неку тачку или ”излази” из ње. Први од та два случаја се јавља када у неком прекиду $x = a$ имамо да је $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ коначан (а

други када је за неки прекид $x = a$ имамо да је $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ коначан) и тада је коефицијент правца (ово следи из приче са коефицијентом правца тангенте на криву) у околини тачке $(a, f(a))$ дат са $k = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$ (тј. $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$).

Коефицијент n (пресек праве са y -осом) добијамо из једнакости $f(a) = k \cdot a + n$. Ово се од вас не очекује на испиту!

7. Други извод, конвексност и превојне тачке функције. Према правилима диференцирања се одреди други извод $f''(x)$ функције $f(x)$ – то је први извод већ одређене функције $f'(x)$, тј. $f''(x) = (f'(x))'$. Даља анализа се своди на одређивање нула и знака другог извода: када је $f''(x) = 0$ имамо кандидата за превојну тачку. На сваком од интервала на коме је $f''(x) > 0$ за свако x имамо да је функција облика \cup , а на сваком од интервала на коме је $f''(x) < 0$ за свако x имамо да је функција \cap (намерно нисмо помињали када је конвексна, односно конкавна, јер се на различитим факултетима користи различита терминологија!). Превојна тачка $x = a$ је она где се мења конвексност. Исто као и код минимума и максимума одређујемо вредност функције, $f(a)$, и тачку $P(a, f(a))$ означавамо на графику.

8. Цртање графика функције. На графику означавамо (ако постоје) следеће тачке: нуле, пресек са y -осом $(0, f(0))$, минимуме и максимуме, превојне тачке, затим цртамо асимптоте и означавамо (цртицама) граничне вредности и на крају све то спојимо водећи рачуна о знаку, монотоности и конвексности. Ако се нешто не слаже, то је показатељ да смо начинили неку грешку у рачуну неке од претходних ставки! Такође на позитивном смеру x -осе треба ставити стрелицу и x , а на позитивном смеру y -осе треба ставити стрелицу и $f(x)$.

Пример 1. Сада ћемо детаљно испитати функцију $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{2x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ и нацртати њен график.

1. Функција $f(x)$ је дефинисана када су дефинисане функције $g(x) = \frac{2(x-1)^2}{2x-1}$ и $h(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$. Функција $g(x) = \frac{2(x-1)^2}{2x-1}$ је дефинисана када су дефинисане функције $2(x-1)^2$ и $2x-1$ (то је за свако $x \in \mathbb{R}$) и кад је $2x-1 \neq 0$, тј. за $x \neq \frac{1}{2}$. Функција $h(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ је дефинисана када је дефинисана функција $\frac{1}{x-1}$, а то је за $x \neq 1$. Стога је функција $f(x)$ дефинисана када је $x \neq \frac{1}{2}$ и $x \neq 1$, односно домен или област дефинисаности функције f је $D = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. $f(0) = \frac{2(0-1)^2}{2 \cdot 0 - 1}e^{\frac{1}{0-1}} = \frac{-2}{e}$, па је пресек са y -осом тачка $Y(0, \frac{-2}{e}) \approx (0, -0.736)$.

Увек је $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, а $2(x-1)^2 = 0$ за $x = 1$, па би $x = 1$ била једина нула да 1 припада домену D (овако функција f нема нула). Како је увек $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, $2(x-1)^2 > 0$ за свако $x \in D$ и $2x-1 > 0$ за $x > \frac{1}{2}$, а $2x-1 < 0$ за $x < \frac{1}{2}$ добијамо да је функција $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$, а $f(x) > 0$ за $x \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

3. Како домен $D = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$ није симетричан у односу на 0 функција $f(x)$ није ни парна ни непарна (П начин је: $f(-2) = -\frac{18}{5}e^{-\frac{1}{3}} \neq \pm \frac{2}{3}e = \pm f(2)$, па није ни парна ни непарна, јер смо нашли вредност $x = 2 \in D$ за коју није испуњено ни својство парности ни непарности – по дефиницији оба својства морају да важе $\forall x \in D$).

Функција $f(x)$ није ни периодична.

4. Како је домен $D = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$ потребно је одредити следећих шест лимеса:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ јер кад $x \rightarrow -\infty$ онда $\frac{1}{x-1} \rightarrow 0$, па $e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow e^0 = 1$, а $\frac{2(x-1)^2}{2x-1} = \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x-1} = \frac{2x-4+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}} \rightarrow -\infty$ кад $x \rightarrow -\infty$ јер $\frac{1}{x} \rightarrow 0$.

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$ јер кад $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$ онда $\frac{1}{x-1} \rightarrow -2$, па $e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow e^{-2} > 0$, $2(x-1)^2 \rightarrow 2(\frac{1}{2}-1)^2 = \frac{1}{2} > 0$ и $2x-1 \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0^-$.

Потпуно аналогно се добија $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ јер кад $x \rightarrow 1^-$ онда $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$, па $e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0$, а и $\frac{2(x-1)^2}{2x-1} \rightarrow \frac{2(1-1)^2}{2 \cdot 1 - 1} = 0$.

За израчунавање $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ потребно је коришћење Лопиталовог правила јер је то лимес облика $0 \cdot \infty$ (прво ћемо свести на лимес облика $\frac{\infty}{\infty}$, па онда можемо да применимо Лопиталово правило; са $\frac{0}{0}$ би се добио тежи лимес!):

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)^2}{2x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{2x-1}{2(x-1)^2}} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{x}{(x-1)^3}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{x}{(x-1)^2}} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{1} = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (потпуно аналогно као кад $x \rightarrow -\infty$).

5. Како смо добили да је $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$ (а и $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$) права $x = \frac{1}{2}$ је вертикална асимптота.

Како је $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ и права $x = 1$ је вертикална асимптота.

Како су $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ бесконачни функција нема хоризонталних асимптота, али може имати косих.

Како се сви лимеси потпуно аналогно рачунају и за $x \rightarrow -\infty$ и за $x \rightarrow +\infty$, свуда ћемо писати $x \rightarrow \pm\infty$.

$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(x-1)^2}{(2x-1)x}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{4}{x} + 2}{2 - \frac{1}{x}}e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{2}{2} \cdot e^0 = 1$. Коефицијент n добијамо након мало сре-

ђивања: $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - k \cdot x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(x-1)^2e^{\frac{1}{x-1}} - (2x^2 - x)}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(1 - \frac{1}{x}) \cdot \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}} - 3 + \frac{2}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 + 0}{2} = -\frac{1}{2}$. Стога је права $y = x - \frac{1}{2}$ обострана коса асимптота.

6. $f'(x) = 2 \frac{e^{\frac{1}{x-1}}(2x^2 - 4x + 1)}{(2x-1)^2}$. Како је увек $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$ и $(2x-1)^2 > 0$ ($x = \frac{1}{2} \notin D$), знак првог извода зависи само од квадратног тринома $2x^2 - 4x + 1$, чије су нуле $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$:

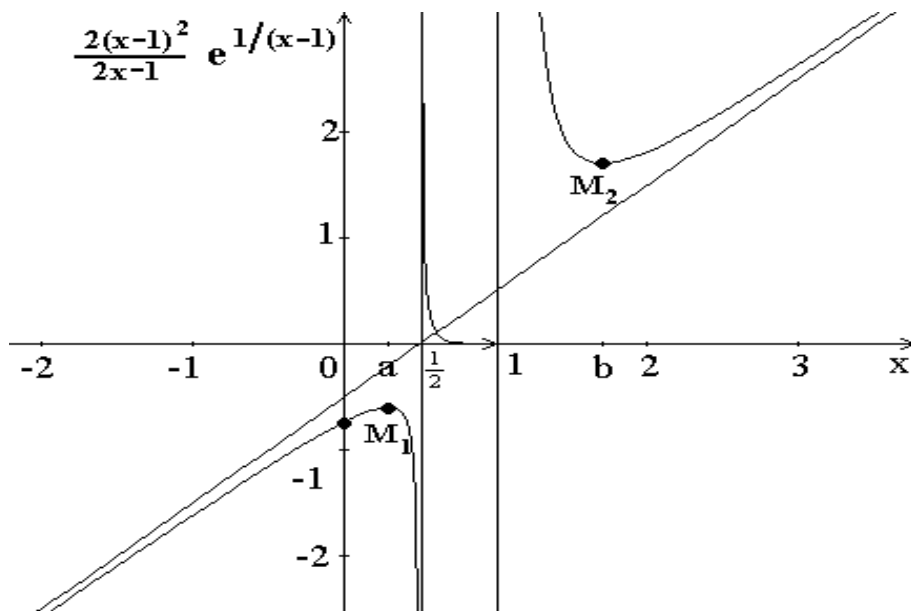
	$(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
$e^{\frac{1}{x-1}}$	+	+	+	+	+	x	+	+	+
$2x^2 - 4x + 1$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$(2x-1)^2$	+	+	+	x	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	+	x	+	x	+	0	+
$f(x)$	\nearrow	max	\searrow	x	\searrow	x	\searrow	min	\nearrow

Потребно је још одредити вредности у локалном максимуму и локалном минимуму: $f_{\max} = f(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{1 - \sqrt{2}}$ и $f_{\min} = f(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{e^{\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}}$. Стога имамо да је локални максимум тачка $M_1(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{e^{-\sqrt{2}}}{1 - \sqrt{2}}) \approx (0.293, -0.587)$, а локални минимум тачка $M_2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{e^{\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}}) \approx (1.707, 1.704)$.

7. $f''(x) = 2 \frac{e^{\frac{1}{x-1}}(2x^2 - 2x + 1)}{(2x-1)^3(x-1)^2}$. Како је увек $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, $2x^2 - 2x + 1 > 0$ (јер је $a = 2 > 0$, а $D = -4 < 0$) и $(x-1)^2 > 0$ ($x = 1 \notin D$), знак првог извода зависи само од члана $(2x-1)^3$:

	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$e^{\frac{1}{x-1}}$	+	+	+	x	+
$2x^2 - 2x + 1$	+	+	+	+	+
$(2x-1)^3$	-	x	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	x	+
$f'(x)$	-	x	+	x	+
$f(x)$	\cap	x	\cup	x	\cup

Функција нема превојних тачака.



Пример 2. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$.

1. Како је $1 + \ln x = 0$ за $x = e^{-1}$ и логаритам $\ln x$ је дефинисан за $x > 0$ имамо да је домен функције: $D = (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$.

2. На скупу D на коме је дефинисана, ова функција нема нула. Знак функције у области D зависи само од знака имениоца, па имамо да је $f(x) < 0$ за $x \in (0, e^{-1})$, $f(x) > 0$ за $x \in (e^{-1}, +\infty)$.

3. Функција није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4. Граничне вредности на крајевима домена су: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^-$ (јер $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln x = -\infty$), $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty$ (јер $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} 1 + \ln x = 0^-$), $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$ (јер $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} 1 + \ln x = 0^+$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Код последњег лимеса смо применили Лопиталово правило (можемо јер и именилац и бројилац теже ка $+\infty$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \ln x} \stackrel{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

5. На основу претходне тачке имамо да је права $x = e^{-1}$ вертикална асимптота. Како при одређивању да ли има косу асимптоту добијамо $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \ln x} = 0$ следи да функција нема косу асимптоту (због $k = 0$ добили би $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - k \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$).

6. Први извод је $f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$.

	0	$(0, e^{-1})$	e^{-1}	$(e^{-1}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	x	-	x	-	0	+
$f(x)$	x	\searrow	x	\searrow	min	\nearrow

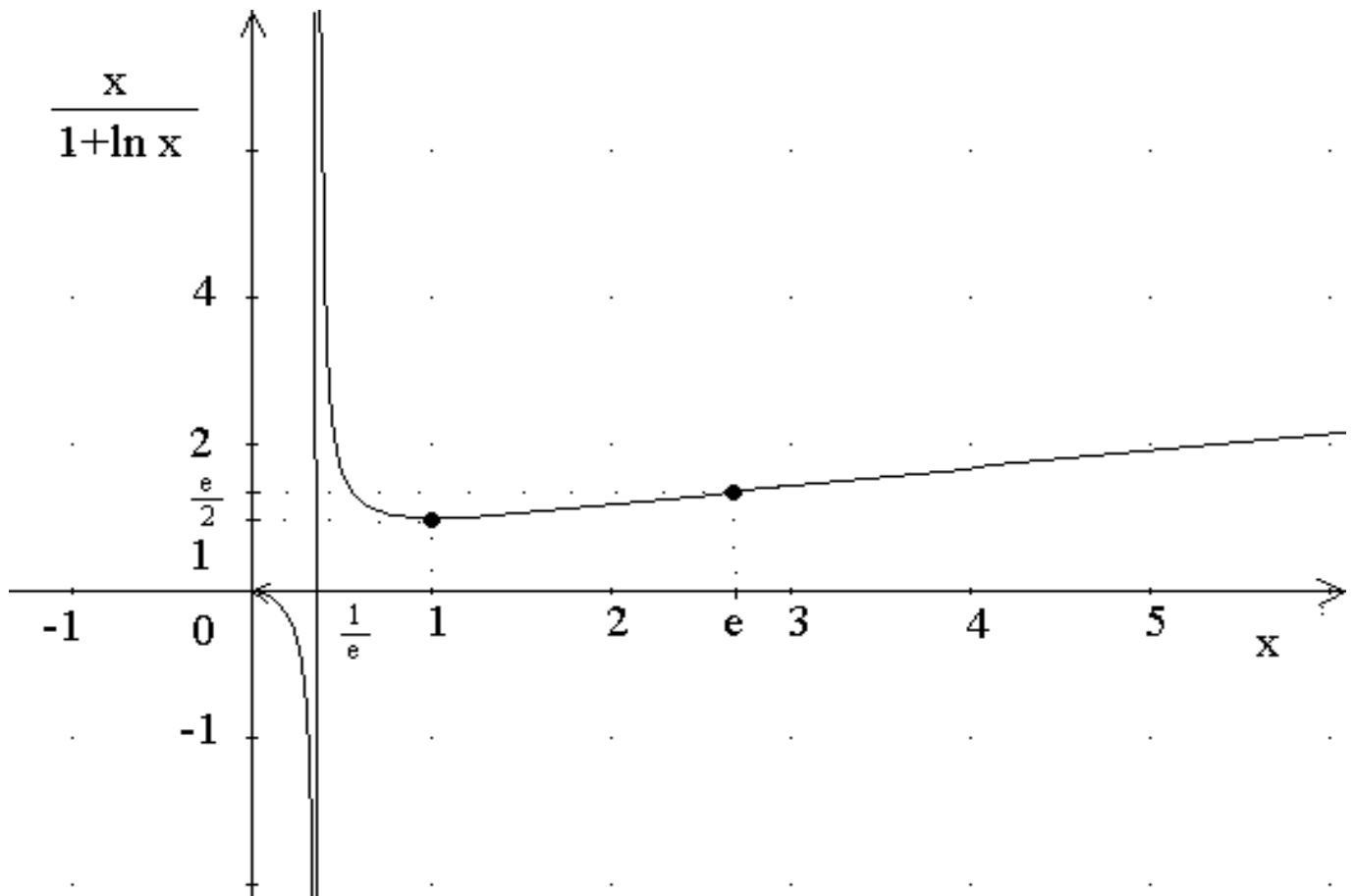
Минимум је $M(1, 1)$.

7. $f''(x) = \frac{1 - \ln x}{x(1 + \ln x)^3}$.

	0	$(0, e^{-1})$	e^{-1}	(e^{-1}, e)	e	$(e, +\infty)$
$f''(x)$	x	-	x	+	0	-
$f(x)$	x	\cap	x	\cup	п.т.	\cap

Превојна тачка је $P(e, \frac{e}{2})$.

На основу свега овога цртамо график.



Пример 3. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \frac{1 + \ln |x|}{x(1 - \ln |x|)}$.

1. Домен функције је $D = (-\infty, -e) \cup (-e, 0) \cup (0, e) \cup (e, +\infty)$.

2. Нуле функције су $x = \pm \frac{1}{e}$. Функција мења знак и у тачкама прекида, па имамо да је $f(x) < 0$ за $x \in (-e, -e^{-1}) \cup (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$, $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -e) \cup (-e^{-1}, 0) \cup (e^{-1}, e)$.

3. Функција је непарна (симетрична у односу на координатни почетак).

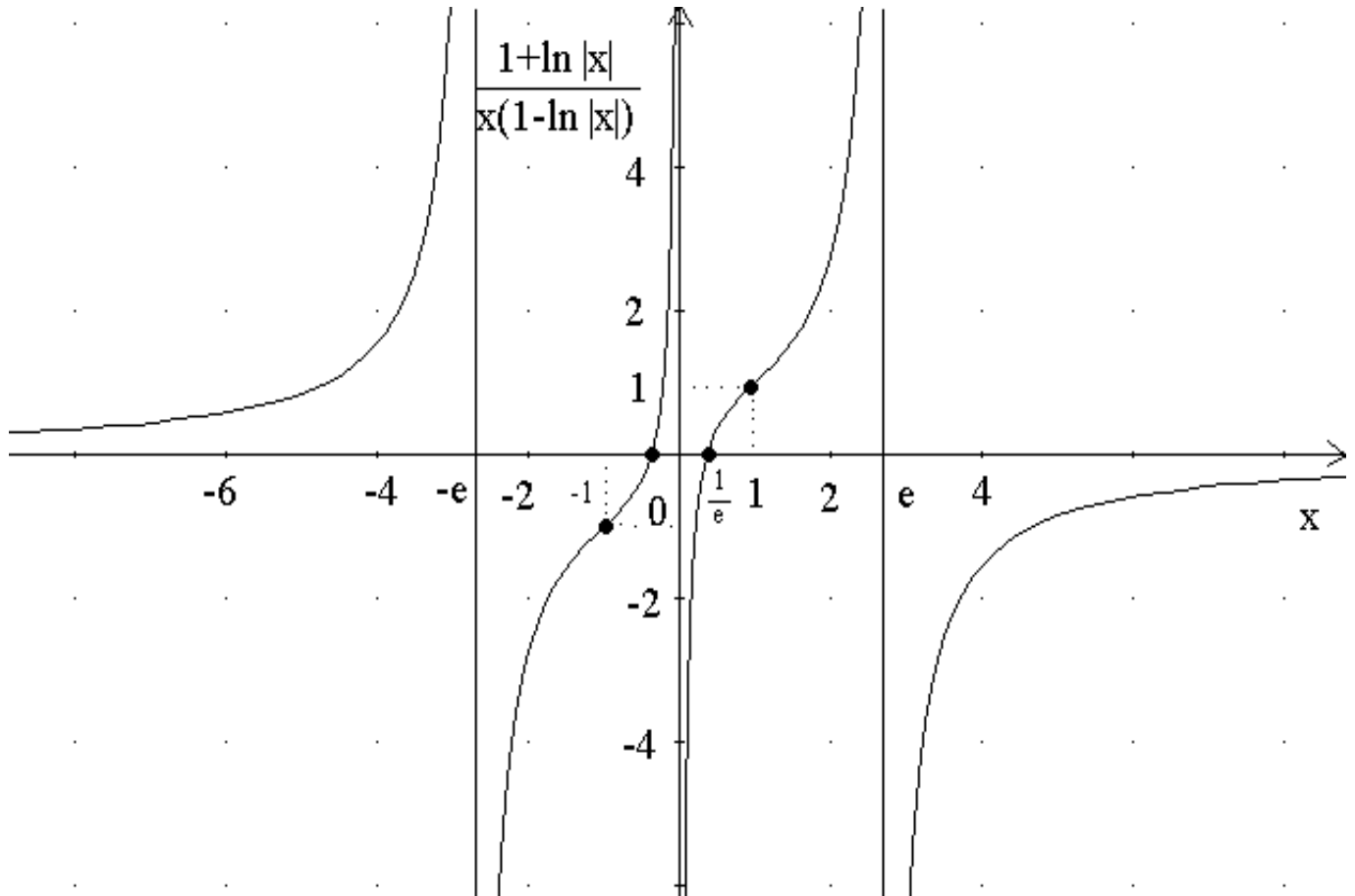
4. Граничне вредности на крајевима домена D су: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x \rightarrow -e^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -e^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$.

5. Праве $x = -e$, $x = 0$ и $x = e$ су вертикалне асимптоте, а права $y = 0$ је обострана хоризонтална асимптота.

6. За $x < 0$ први извод је $f'(x) = \frac{1 + \ln^2(-x)}{x^2(1 - \ln(-x))^2}$, а за $x > 0$ први извод је $f'(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x^2(1 - \ln x)^2}$, па је функција $f(x)$ растућа на сваком од интервала где је дефинисана.

7. За $x < 0$ други извод је $f''(x) = \frac{2 \ln(-x)(\ln^2(-x) - \ln(-x) + 2)}{x^3(1 - \ln(-x))^3}$, а за $x > 0$ други извод је $f''(x) = \frac{2 \ln x(\ln^2 x - \ln x + 2)}{x^3(1 - \ln x)^3}$. Једине превојне тачке су $x = -1, y = -1$ и $x = 1, y = 1$. Други фактор у бројиоцу је

увек позитиван, јер је дискриминанта квадратног тринома $u^2 - u + 2$ (за $x > 0, u = \ln x$, а за $x < 0, u = \ln(-x)$) негативна. Функција је \cup ($f''(x) > 0$) на интервалима $(-\infty, -e)$, $(-1, 0)$ и $(1, e)$, а \cap на $(-e, -1)$, $(0, 1)$ и $(e, +\infty)$.



Тест из цртања функција

Шифра задатка: **A1**

Скицирати графике следећих функција:

1. $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$.

1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нема нула. Знак: свуда $+$. Пресек са y -осом је $Y(0, 5)$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5° Нема вер.ас, нема косих ас, лева хор.ас. $y = 0$.

6° $f' = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Монотоност: свуда \nearrow . Нема локалних екстрема.

7° $f'' = (x^2 - 1)e^x$. Конвексност: \cup $\boxed{-1}$ \cap $\boxed{1}$ \cup . Превојне тачке су $P_1(-1, \frac{10}{e})$ и $P_2(1, 2e)$.

2. $f(x) = 2x - \sqrt{3x^2 + 6x}$.

1° Домен је $D = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$.

2° Нуле су $x_1 = 0$ и $x_2 = 6$. Знак: $-(-2) \times \boxed{0} - \boxed{6} +$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(-2) = -4$, $f(0) = 0$.

5° Нема вер.ас, нема хор.ас, лева коса ас. $y = (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$, десна коса ас. $y = (2 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$.

6° $f' = 2 - \frac{3x+3}{\sqrt{3x^2+6x}}$. Монотоност: $\nearrow(-2) \times (0) \searrow \boxed{1} \nearrow$. Лок. мин. је $M(1, -1)$.

7° $f'' = \frac{9}{(3x^2+6x)^{3/2}}$. Конвексност: $\cup(-2) \times (0) \cup$. Нема превојних тачака.

3. $f(x) = \ln(x^2 - 10x + 26)$.

1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нула је $x = 5$. Знак: $+\boxed{5}+$. Пресек са y -осом је $Y(0, \ln 26)$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5° Нема асимптота.

6° $f' = \frac{2x-10}{x^2-10x+26}$. Монотоност: $\searrow \boxed{5} \nearrow$. Лок. мин. је $M(5, 0)$.

7° $f'' = -2\frac{x^2-10x+24}{(x^2-10x+26)^2}$. Конвексност: $\cap \boxed{4} \cup \boxed{6} \cap$. Превојне тачке су $P_1(4, \ln 2)$ и $P_2(6, \ln 2)$.

4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$.

1° Домен је $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

5° Вер.ас $x = 0$, нема хор.ас, обострана коса ас. $y = -x + 1$.

6° $f' = -\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + 1\right)$. Монотоност: $\searrow (0) \searrow$. Нема локалних екстрема.

2° Како је $f(1) = e - 1 > 0$ и $f(2) = \sqrt{e} - 2 < 0 \Rightarrow$ има нулу $x = \alpha \in (1, 2)$. Знак: $+(0) + \boxed{\alpha} -$.

7° $f'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$. Конвексност: $\cap \boxed{-1/2} \cup (0) \cup$. Превојна тачка је $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}\right)$.

Нумерички се добија да је $\alpha \approx 1.763222834$.

Тест из цртања функција

Шифра задатка: **Б2**

Скицирати графике следећих функција:

1. $f(x) = (6x^2 - 2x - 1)e^{2x}$.

1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нуле су $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{6}$. Знак: $+$ $\boxed{\frac{1 - \sqrt{7}}{6}}$ $-$ $\boxed{\frac{1 + \sqrt{7}}{6}}$ $+$. Пресек са y -осом је $Y(0, -1)$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5° Нема вер.ас, нема косих ас, лева хор.ас. $y = 0$.

6° $f' = 4(3x^2 + 2x - 1)e^{2x}$. Монотоност: $\nearrow \boxed{-1} \searrow \boxed{1/3} \nearrow$. Лок. мин. је $M_1(\frac{1}{3}, -e^{2/3})$. Лок. макс. је $M_2(-1, 7e^{-2})$.

7° $f'' = 8x(3x + 5)e^{2x}$. Конвексност: $\cup \boxed{-5/3} \cap \boxed{0} \cup$. Превојне тачке су $P_1(-\frac{5}{3}, 19e^{-10/3})$ и $P_2(0, -1)$.

2. $f(x) = -2x - \sqrt{3x^2 + 6x - 9}$.

1° Домен је $D = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

2° Нема нула. Знак: $+$ (-3) X (1) $-$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $f(-3) = 6$, $f(1) = -2$.

5° Нема вер.ас, нема хор.ас, лева коса ас. $y = (-2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$, десна коса ас. $y = (-2 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$.

6° $f' = -2 - \frac{3x + 1}{\sqrt{3x^2 + 6x - 9}}$. Монотоност: $\searrow \boxed{-5} \nearrow (-3)$ X $(1) \searrow$. Лок. мин. је $M(-5, 4)$.

7° $f'' = \frac{36}{(3x^2 + 6x - 9)^{3/2}}$. Конвексност: $\cup (-3)$ X $(1) \cup$. Нема превојних тачака.

3. $f(x) = \ln^2 x - 4 \ln x + 3$.

1° Домен је $D = (0, +\infty)$.

2° Нуле су $x = e$ и $x = e^3$. Знак: 0 $+$ \boxed{e} $-$ $\boxed{e^3}$ $+$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5° Бер. ас $x = 0$, нема десну хор.ас, ни десну косу ас.

6° $f' = 2 \frac{\ln x - 2}{x}$. Монотоност: $0 \searrow \boxed{e^2} \nearrow$. Лок. мин. је $M(e^2, -1)$.

7° $f'' = -2 \frac{\ln x - 3}{x^2}$. Конвексност: $0 \cup \boxed{e^3} \cap$. Превојна тачка је $P(e^3, 0)$.

4. $f(x) = (x - 3)\sqrt{9 - x}$.

1° Домен је $D = (-\infty, 9]$.

2° Нуле су $x_1 = 3$ и $x_2 = 9$. Знак: $- \boxed{3} + \boxed{9}$ X. Пресек са y -осом је $Y(0, -9)$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(9) = 0$.

5° Нема асимптота.

6° $f' = \frac{3(7 - x)}{2\sqrt{9 - x}}$. Монотоност: $\nearrow \boxed{7} \searrow (9)$ X. Лок. макс. је $M(7, 4\sqrt{2})$.

7° $f'' = \frac{3(x - 11)}{4(9 - x)^{3/2}}$. Конвексност: $\cap (9)$ X. Нема превојних тачака.

Тест из цртања функција

Шифра задатка: **В3**

Скицирати графике следећих функција:

1. $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.

1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нула је $x = 0$. Знак: $- \boxed{0} +$. Пресек са y -осом је нула $Y(0, 0)$.

3° Није периодична. Јесте непарна.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

5° Нема вер.ас, обострана хор.ас. $y = 0$.

6° $f' = (1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Монотоност: $\searrow \boxed{-1} \nearrow \boxed{1} \searrow$. Лок. мин. је $M_1(-1, -e^{-1/2})$. Лок. макс. је $M_2(1, e^{-1/2})$.

7° $f'' = x(x^2 - 3)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Конвексност: $\cap \boxed{-\sqrt{3}} \cup \boxed{0} \cap \boxed{\sqrt{3}} \cup$. Превојне тачке су $P_1(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-3/2})$, $P_2(0, 0)$ и $P_3(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-3/2})$.

2. $f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нула је $x = -1$. Знак: $- \boxed{-1} +$. Пресек са y -осом је $Y(0, 1)$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3/2$.

5° Нема вер.ас, лева коса ас. $y = 2x + 5/2$, десна хор.ас. $y = 3/2$.

6° $f' = 1 - \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$. Монотоност: свуда \nearrow . Нема локалних екстрема.

7° $f'' = \frac{-3}{4(x^2 + x + 1)^{3/2}}$. Конвексност: свуда \cap . Нема превојних тачака.

3. $f(x) = 3\ln^2 x - 8\ln(\ln x)$.

1° Домен је $D = (1, +\infty)$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5° Има вер.ас $x = 1$, нема десну ни хор.ас, ни десну косу ас.

6° $f' = 2 \frac{3\ln^2 x - 4}{x \cdot \ln x}$. Монотоност: $1 \searrow \boxed{e^{2/\sqrt{3}}} \nearrow$. Лок. мин. је $M(e^{2/\sqrt{3}}, 4 - 8\ln(2/\sqrt{3}))$.

2° Нема нула. Знак: свуда $+$.

7° $f'' = -2 \frac{(\ln x - 2) \cdot (3\ln^2 x + 3\ln x + 2)}{x^2 \cdot \ln^2 x}$. Конвексност: $1 \cup \boxed{e^2} \cap$. Превојна тачка је $P(e^2, 12 - 8\ln 2)$.

4. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

1° Домен је $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2° Нема нула. Знак: $+(0) +$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

5° Вер.ас $x = 0$, нема хор.ас, нема косих ас.

6° $f' = e^{\frac{1}{x}}(2x - 1)$. Монотоност: $\searrow (0) \searrow \boxed{1/2} \nearrow$. Лок. мин. је $M\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$.

7° $f'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x^2 - 2x + 1)}{x^2}$. Конвексност: $\cup (0) \cup$. Нема превојних тачака.

Тест из цртања функција

Шифра задатка: **Г4**

Скицирати графике следећих функција:

1. $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x^2}$.

1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нема нула. Знак: свуда +. Пресек са y -осом је $Y(0, 2)$.

3° Није периодична. Јесте парна.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

5° Нема вер.ас, обострана хор.ас. $y = 0$.

6° $f' = -2x(x^2 + 1)e^{-x^2}$. Монотоност: $\nearrow \boxed{0} \searrow$. Лок. макс. је $M(0, 2)$.

7° $f'' = 2(x^2 - 1)(2x^2 + 1)e^{-x^2}$. Конвексност: $\cup \boxed{-1} \cap \boxed{1} \cup$. Превојне тачке су $P_1(-1, \frac{3}{e})$ и $P_2(1, \frac{3}{e})$.

2. $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

1° Домен је $D = (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$.

2° Нула је $x = -1$. Знак: $-(-2) \times \boxed{-1} -$. Пресек са y -осом је $Y(0, 1 - \sqrt{2})$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1/2$, $f(-2) = -1$, $f(-1) = 0$.

5° Нема вер.ас, лева коса ас. $y = 2x + 5/2$, десна хор.ас. $y = -1/2$.

6° $f' = 1 - \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$. Монотоност: $\nearrow (-2) \times (-1) \searrow$. Нема локалних екстрема.

7° $f'' = \frac{1}{4(x^2+3x+2)^{3/2}}$. Конвексност: $\cup (-2) \times (-1) \cup$. Нема превојних тачака.

3. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$.

1° Домен је $D = \mathbb{R}$.

2° Нуле су $x_{1,2} = \pm 2$ и $x_{3,4} = \pm \sqrt{2}$. Знак: $+\boxed{-2} - \boxed{-\sqrt{2}} + \boxed{\sqrt{2}} - \boxed{2} +$. Пресек са y -осом је $Y(0, 8)$.

3° Није периодична. Јесте парна.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5° Нема асимптота.

6° $f' = 4x(x^2 - 3)$. Монотоност: $\searrow \boxed{-\sqrt{3}} \nearrow \boxed{0} \searrow \boxed{\sqrt{3}} \nearrow$. Лок. мин су $M_1(-\sqrt{3}, -1)$ и $M_3(\sqrt{3}, -1)$, а лок. макс. је $M_2(0, 8)$.

7° $f'' = 12(x^2 - 1)$. Конвексност: $\cup \boxed{-1} \cap \boxed{1} \cup$. Превојне тачке су $P_1(-1, 3)$ и $P_2(1, 3)$.

4. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$.

1° Домен је $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

2° Нуле су $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Знак: $+\boxed{-1} - \boxed{1} + (2) +$. Пресек са y -осом је $Y(0, \frac{-1}{4})$.

3° Није ни парна, ни непарна, ни периодична.

4° $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

5° Вер.ас $x = 2$, обострана хор.ас $y = 1$.

6° $f' = \frac{2(1-2x)}{(x-2)^3}$. Монотоност: $\searrow \boxed{1/2} \nearrow (2) \searrow$. Лок. мин. је $M(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$.

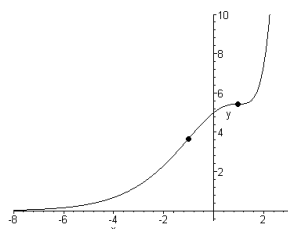
7° $f'' = \frac{2(4x+1)}{(x-2)^4}$. Конвексност: $\cap \boxed{-1/4} \cup (2) \cup$. Превојна тачка је $P(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{27})$.

Решења теста

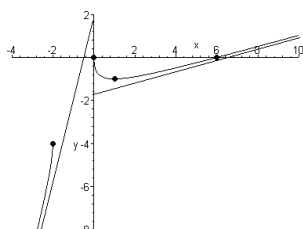
Од вас се очекује, да на графику означите вредности (на x -оси и y -оси), као и саме тачке у којима функција има нулу, пресек са y -осом, локални минимум, локални максимум и превојне тачке, као и асимптоте. Такође на позитивном смеру x -осе треба ставити стрелицу и x , а на позитивном смеру y -осе треба ставити стрелицу и $f(x)$.

Доњи графици вам дају представу како изгледа функција, али на њима морате да означите све горе наведено.

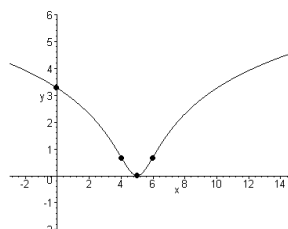
A1



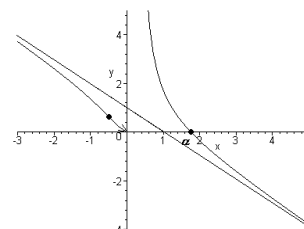
$$f_1 = (x^2 - 4x + 5)e^x$$



$$f_2 = 2x - \sqrt{3x^2 + 6x}$$

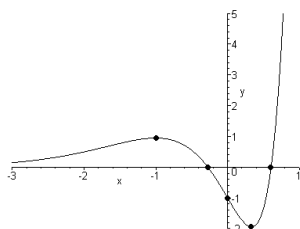


$$f_3 = \ln(x^2 - 10x + 26)$$

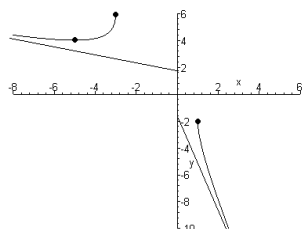


$$f_4 = e^{\frac{1}{x}} - x$$

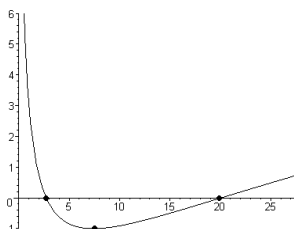
B2



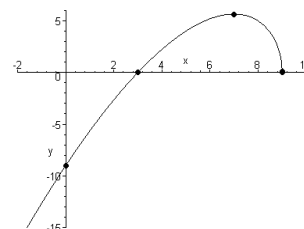
$$f_1 = (6x^2 - 2x - 1)e^{2x}$$



$$f_2 = -2x - \sqrt{3x^2 + 6x - 9}$$

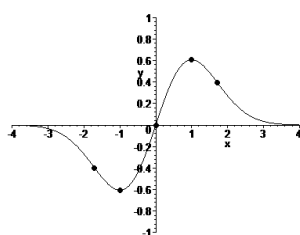


$$f_3 = \ln^2 x - 4 \ln x + 3$$

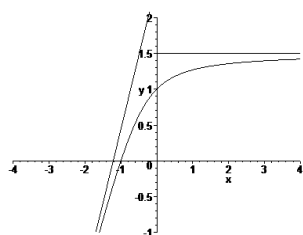


$$f_4 = (x-3)\sqrt{9-x}$$

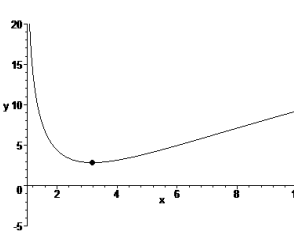
B3



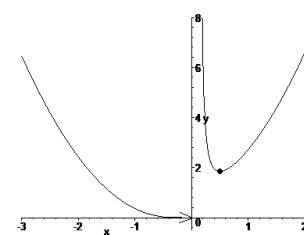
$$f_1 = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$



$$f_2 = x + 2 - \sqrt{x^2 + x + 1}$$

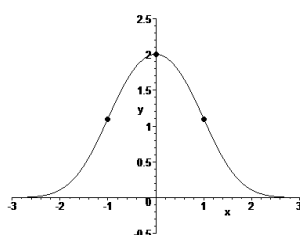


$$f_3 = 3 \ln^2 x - 8 \ln(\ln x)$$

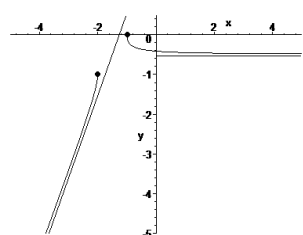


$$f_4 = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

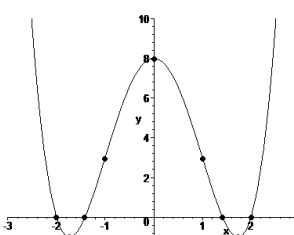
Г4



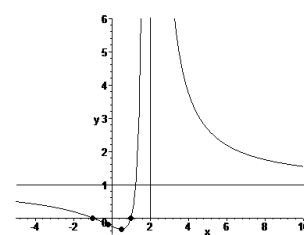
$$f_1 = (x^2 + 2)e^{-x^2}$$



$$f_2 = x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x + 2}$$



$$f_3 = x^4 - 6x^2 + 8$$



$$f_4 = \frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$$

Сада ћемо навести још неки број функција које су се појављивале у роковима. Задаци нису сортирани ни по тежини ни по тематици, него према редоследу појављивања. Провежбајте што више од ових задатака.

Испитати ток и скицирати график функције:

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$. 2. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. 3. $f(x) = (x-1)^2 \ln(x-1)$. 4. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. 5. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$.
6. $f(x) = (x+3)e^{1/(x-3)}$. 7. $f(x) = xe^{1/x}$. 8. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. 9. $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$. 10. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$.
11. $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$. 12. $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$. 13. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$. 14. $f(x) = \frac{e^x}{x}$. 15. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
16. $f(x) = (x^2 - 3)e^x$. 17. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3}$. 18. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. 19. $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. 20. $f(x) = x^2 \ln x$.
21. $f(x) = (x^2 - 8)e^x$. 22. $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3}$. 23. $f(x) = x \ln^2 x$. 24. $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$. 25. $f(x) = (x-1)\sqrt{10-x}$.
26. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{\ln(x-2)}$. 27. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$. 28. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$. 29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$. 30. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.
31. $f(x) = x^2 \sqrt{x+5}$. 32. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. 33. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^3}$. 34. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$. 35. $f(x) = \frac{6x - x^2 - 9}{x-2}$.
36. $f(x) = (x-1)^2(x-2)^3$. 37. $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$. 38. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. 39. $f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}$. 40. $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$.
41. $f(x) = e^{1/(1-x^2)}$. 42. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 43. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x+1}$. 44. $f(x) = \frac{x^2 + 12x + 20}{x+1}$. 45. $f(x) = \frac{4x}{4+x^2}$.
46. $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 10)$. 47. $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x+1}$. 48. $f(x) = \frac{x^2 + 19x + 34}{x+1}$. 49. $f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2 + 1}$.
50. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$. 51. $f(x) = (x-2)^2(x+3)^3$. 52. $f(x) = x+2 - \sqrt{x^2+x-2}$. 53. $f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17)$.
54. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}$. 55. $f(x) = 3(\ln^x - \ln x^2)$. 56. $f(x) = \frac{\ln x}{3 \ln x - 1}$. 57. $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 7}{x-1}$.
58. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x-1}$. 59. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1}$. 60. $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$. 61. $f(x) = x+1 - \sqrt{x^2+x}$.
62. $f(x) = x(\ln^2 x - \ln x^2)$. 63. $f(x) = \frac{(x+3)^2}{\ln(x+3)}$. 64. $f(x) = (x-1)e^{1/(x-3)}$. 65. $f(x) = \frac{x+1}{\ln^2(x+1)}$.
66. $f(x) = \frac{x-2}{\ln^2(x-2)}$. 67. $f(x) = \frac{2x^2}{2x+1} e^{1/x}$. 68. $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$. 69. $f(x) = \ln^2 x - 4 \ln x + 4$.
70. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$. 71. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{e^{x^2}}$. 72. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. 73. $f(x) = xe^{-x^2}$. 74. $f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3}$.
75. $f(x) = (x-3) \ln^2(x-3)$.
76. $f(x) = \arctg \frac{x^2}{x^2 - 1}$. Овај задатак није био на писменом делу испита!